Modulo 3.2 – Le sollecitazioni semplici

<u>Dimensionamento di una struttura:</u> se una struttura è sottoposta a delle sollecitazioni è necessario che il valore delle tensioni nel suo punto più sollecitato non superi la *tensione ammissibile* del materiale che può essere calcolata dividendo il *carico unitario massimo* per un coefficiente di sicurezza che dipende dal materiale e dal tipo di sollecitazione.

In caso di *sollecitazioni di tipo statico* se la struttura che andiamo ad analizzare *è realizzata in acciaio* la tensione ammissibile σ_{amm} viene generalmente calcolata dividendo il carico unitario massimo R_m per un coefficiente di sicurezza pari a 2,5

$$\sigma_{amm}=\frac{R_m}{2,5}$$

oppure dividendo il carico unitario di snervamento superiore R_{eH} per un coefficiente di sicurezza pari a 1,5

$$\sigma_{amm}=\frac{R_{eH}}{1,5}$$

L'utilizzo di una o l'altra delle formule appena viste porta a risultati del tutto equivalenti.

In alcuni materiali non è possibile definire il carico unitario di snervamento; in questo caso per il calcolo della tensione ammissibile si ricorre unicamente al rapporto tra il carico unitario massimo ed un opportuno coefficiente di sicurezza.

Esempio 1: in un acciaio per impieghi strutturali UNI EN 10025-S235 abbiamo i valori R_{eH}=235 N/mm^2 e R_m=360 N/mm^2 da cui otteniamo per la tensione massima ammissibile i valori

$$\sigma_{amm}=\frac{R_m}{2,5}=\frac{[360\,N/mm^2]}{2,5}=144\,N/mm^2$$

$$\sigma_{amm}=\frac{R_{eH}}{1,5}=\frac{[235\,N/mm^2]}{1,5}=156,6\,N/mm^2$$

che possono essere considerati equivalenti; occorre ricordare che tali valori sono validi soltanto per sollecitazioni di tipo statico.

Esempio 2: per la ghisa grigia il coefficiente di sicurezza normalmente usato per i carichi statici oscilla tra 5 e 7; se prendiamo un considerazione una ghisa EN-GJL 250 avente un valore di R_m=250 N/mm^2 il valore della tensione ammissibile sarà

$$\sigma_{amm}=\frac{R_m}{5}=\frac{[250\,N/mm^2]}{5}=50\,N/mm^2$$

Concludendo si può affermare che *"le strutture calcolate in sede di progetto per soddisfare le condizioni di resistenza, di stabilità e di sicurezza devono essere dimensionate in modo che le tensioni interne dovute all'azione dei carichi risultino inferiori alla tensione ammissibile"*.

Trazione e compressione: nella prova di trazione abbiamo visto che una struttura soggetta a questo tipo di sollecitazione è soggetta ad una *tensione normale* (ovvero perpendicolare alla sezione che stiamo analizzando) calcolabile con la formula

$$\sigma=\frac{F}{A} \qquad [\frac{N}{mm^2}]$$

e che come conseguenza di questa tensione subisce un allungamento calcolabile con la formula

$$l-l_0=\frac{F\,l_0}{E\,A} \qquad [mm]$$

dove E=modulo di elasticità normale (o modulo di Young) dipende dal materiale.

Se abbiamo invece una sollecitazione di compressione avremo sempre una tensione normale che si calcola con la formula appena vista ed una riduzione di lunghezza calcolabile con la formula

$$l_0-l=\frac{F\,l_0}{E\,A} \qquad [mm]$$

A differenza delle formule viste per la trazione, valide in ogni caso, nel caso della compressione si dovrebbe tener conto del carico di punta che può mettere in crisi le cosiddette "strutture snelle".
Per la complessità dei calcoli gli effetti del carico di punta saranno oggetto di una trattazione separata.

Esempio 3: consideriamo un tubo 20x1 avente una lunghezza l_0=1m sollecitato da una forza di trazione pari a F=10000 N. Calcolare la tensione massima generata da tale forza e la sua lunghezza dopo aver applicato la forza se E=210000 N/mm^2

Calcolo l'area della sezione

$$A=\frac{(D^2-d^2)\pi}{4}=\frac{(20^2-18^2)\pi}{4}\,mm^2=59{,}69\,mm^2$$

la tensione massima generata dalla forza indicata sarà

$$\sigma_{max}=\frac{F}{A}=\frac{10000\,N}{59{,}66\,mm^2}=167{,}5\,\frac{N}{mm^2}$$

l'allungamento del tubo una volta applicata la forza sarà

$$l-l_0=\frac{F\,l_0}{E\,A}=(\frac{10000\cdot 1000}{210000\cdot 59{,}69})\,mm=0{,}797\,mm$$

Esempio 4: verificare se un tondo con d=20mm sollecitato da una forza di trazione statica F=50000N si trova in condizioni di sicurezza. Il materiale è acciaio per impieghi strutturali S235 (nei calcoli utilizzare un coefficiente di sicurezza pari a 1,5).

Calcolo la sezione del tondo

$$A=\frac{d^2\pi}{4}=20^2\frac{\pi}{4}mm^2=314{,}16\,mm^2$$

L'acciaio S235 ha un carico unitario di snervamento superiore R_{eH}=235 N/mm^2 quindi la tensione massima ammissibile considerato il coefficiente di sicurezza indicato sarà

$$\sigma_{am}=\frac{R_{eH}}{1{,}5}=\frac{235}{1{,}5}\frac{N}{mm^2}=156{,}6\frac{N}{mm^2}$$

La tensione massima dovuta alla sollecitazione indicata sarà

$$\sigma_{max}=\frac{F}{A}=\frac{50000\,N}{314{,}16\,mm^2}=159{,}15\frac{N}{mm^2}$$

Poichè $\sigma_{max} > \sigma_{amm}$ il materiale non si trova in condizioni di sicurezza (anche se di poco).

Esempio 3) dopo aver applicato una forza F ad un asta avente un diametro d=10mm ed una lunghezza iniziale l_0=3m la sua lunghezza aumenta di 2 mm. Calcolare la forza F nell'ipotesi che il materiale segua la legge di Hooke e che E=210000 N/mm^2.

Calcolo la sezione del tondino

$$A=\frac{d^2\pi}{4}=\frac{10^2\pi}{4}mm^2=78{,}54\,mm^2$$

ricavo la formula inversa

$$l-l_0=\frac{Fl_0}{EA}\ \rightarrow F=\frac{l-l_0}{l_0}EA$$

ed infine calcolo la forza richiesta

$$F=\frac{l-l_0}{l_0}EA=(\frac{3002-3000}{3000}\ \ 210000\ \ 78{,}54)\frac{N}{mm^2}=10996\,N$$

Esempio 6) calcolare di quanto si riduce la lunghezza di tubolare di alluminio avente sezione 60x60x2 e lunghezza pari ad un metro sotto l'azione di un carico F=25000 N. Nei calcoli ipotizzare che il materiale segua la legge di Hooke e che E_{Al}=70000 N/mm^2.

Calcolo la sezione del tubolare

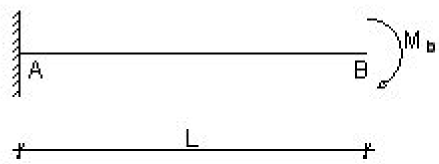
$$A=L^2-l^2=(60^2-56^2)mm^2=464\,mm^2$$

Calcolo di quanto si riduce la lunghezza del tubolare sotto l'azione del carico

$$l_0-l=\frac{F\,l_0}{E\,A}\ \rightarrow l_0-l=(\frac{25000\cdot1000}{70000\cdot464})mm=0{,}769\,mm$$

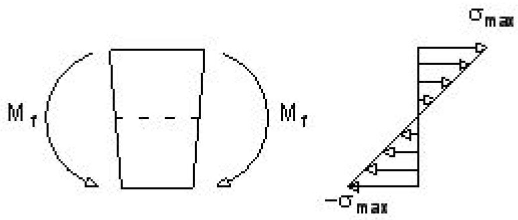
Flessione retta: la flessione è una sollecitazione nella quale le fibre di una sezione non sono tutte sollecitate allo stesso modo ma sono più o meno sollecitate a seconda della loro distanza da un asse chiamato asse neutro.

Consideriamo ad esempio la trave incastrata in figura



sollecitata dal momento flettente M_b applicato alla sua estremità libera; dalla statica sappiamo che la sollecitazione in questo caso è uguale in tutte le sezioni perpendicolari all'asse della trave ma in ogni sezione analizzata cosa accade?

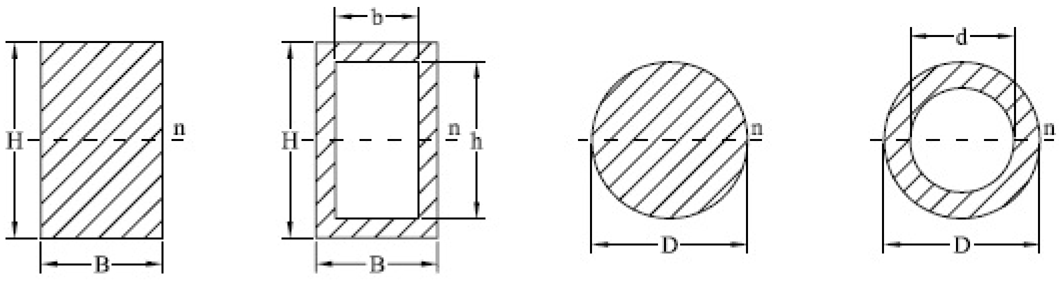
Consideriamo un piccolo tratto della trave; dopo aver applicato il momento flettente lo stato delle tensioni all'interno della trave assumerà i valori in figura



dove il valore della tensione massima σ_{max} dovuto alla flessione si può calcolare con la formula

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} \qquad [\frac{N}{mm^2}]$$

dove W_f = *modulo di resistenza a flessione* dipende dalla forma della sezione; le formule per calcolare il modulo di resistenza a flessione, la cui unità di misura è mm^3, sono riportate qui di seguito



$$W_f = \frac{B \cdot H^2}{6} \qquad W_f = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \qquad W_f = \frac{\pi D^3}{32} \qquad W_f = \frac{\pi (D^3 - d^3)}{32}$$

Esempio 7: calcolare il modulo di resistenza a flessione di un tubo avente una sezione rettangolare le cui misure sono 40x30x2 ipotizzando chel'asse neutro sia parallelo al lato più corto della sezione

nelle tabelle vediamo che per un tubo a sezione rettangolare il modulo di resistenza a flessione vale

$$W_f = \frac{1}{6\text{H}}(BH^3 - bh^3)$$

dove nel caso assegnato H=40mm, h=36mm, B=30mm, b=26mm; sostituendo questi valori otteniamo

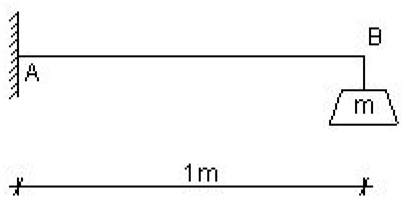
$$W_f = \frac{1}{6\cdot 40}(30\cdot 40^3 - 26\cdot 36^3) = \frac{1}{240}(1920000 - 1210000) = 2945{,}6\, mm^3$$

Esempio 8: ripetere i calcoli dell'esercizio precedente ipotizzando che l'asse neutro sia parallelo al lato più lungo della sezione

in questo caso avremo H=30mm, h=26mm, B=40mm, b=36mm; sostituendo questi valori nella formula indicata nell'esercizio precedente otteniamo

$$W_f = \frac{1}{6\cdot 30}(40\cdot 30^3 - 36\cdot 26^3) = \frac{1}{180}(1080000 - 632736) = 2484{,}8\, mm^3$$

Esempio 9: verificare se un tubolare realizzato in acciaio S235, avente una lunghezza pari ad 1 metro ed una sezione 40x40x2 resiste alla sollecitazione statica dovuta al carico rappresentato in figura dove m=100 kg. (Ipotizzare un coefficiente di sicurezza c_s=1,5 e trascurare gli effetti della sollecitazione di taglio)



nelle tabelle per un tubo a sezione quadrata otteniamo che

$$W_f = \frac{(L^4 - l^4)}{6\,L}$$

che per L=40mm e l=36mm diviene

$$W_f = \frac{40^4 - 36^4}{6\cdot 40} mm^3 = 3668{,}26\, mm^3$$

considerato un coefficiente di sicurezza 1,5 si ricava che la tensione massima ammissibile è

$$\sigma_{amm} = \frac{R_{eH}}{1{,}5} = \frac{235\, N/mm^2}{1{,}5} = 156{,}6\, N/mm^2$$

il punto del tubolare dove il momento flettente è massimo è in prossimità dell'incastro; in tale punto il suo valore è

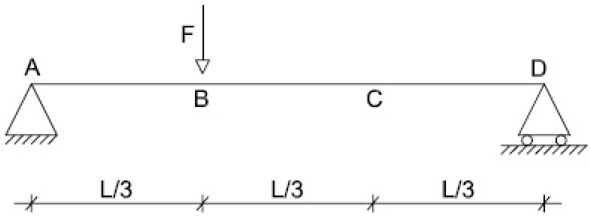
$$M_f = mgl = 100\text{kg}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 1\,m = 981\,Nm = 981000\,Nmm$$

in corrispondenza di tale punto avremo quindi la massima sollecitazione dovuta alla flessione il cui valore è

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{981000\,Nmm}{3668{,}26\,mm^3} = 267{,}43\frac{N}{mm^2}$$

poichè $\sigma_{max} > \sigma_{amm}$ si può concludere che la struttura non è verificata.

Esempio 10: verificare se un tubolare realizzato in acciaio S235, avente una lunghezza pari ad 1 metro ed una sezione 40x40x2 resiste alla sollecitazione statica dovuta alla forza rappresentata in figura dove F=981 N (Ipotizzare un coefficiente di sicurezza c_s=1,5 e trascurare gli effetti della sollecitazione di taglio).



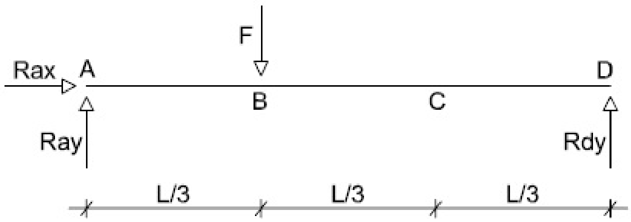
nelle tabelle per un tubo a sezione quadrata avente uno spessore di 2 millimetri (L=40 mm e l=36 mm) otteniamo per il modulo di resistenza a flessione il valore

$$W_f = \frac{(L^4 - l^4)}{6L} = \frac{40^4 - 36^4}{6\cdot 40}\,mm^3 = 3668{,}26\,mm^3$$

considerato un coefficiente di sicurezza c_s=1,5 si ricava che la tensione massima ammissibile è

$$\sigma_{amm} = \frac{R_{eH}}{1{,}5} = \frac{235\,N/mm^2}{1{,}5} = 156{,}6\,N/mm^2$$

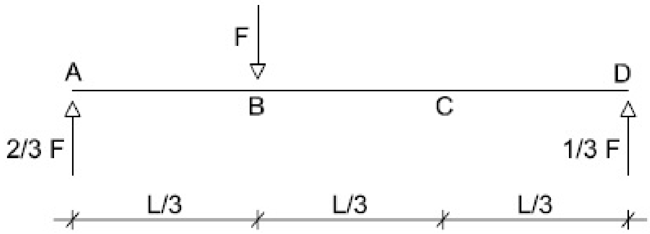
sostituisco ora ai vincoli presenti le reazioni vincolari corrispondenti



calcolo i valori delle reazioni vincolari

$$\begin{cases} \rightarrow R_{dx}=0 \\ \uparrow R_{ay}-F+R_{dy}=0 \\ \frac{1}{3}FL-R_{dy}L=0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{ay}-F+R_{dy}=0 \\ R_{dy}L=\frac{1}{3}FL \end{cases} \quad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{ay}-F+\frac{1}{3}F=0 \\ R_{dy}=\frac{1}{3}F \end{cases} \quad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{ay}-\frac{2}{3}F=0 \\ R_{dy}=\frac{1}{3}F \end{cases} \quad \begin{cases} R_{dx}=0 \\ R_{ay}=\frac{2}{3}F \\ R_{dy}=\frac{1}{3}F \end{cases}$$

sostituisco i valori trovati nel grafico



Il valore massimo del momento flettente si ha in corrispondenza del punto B; questo perchè nel tratto compreso tra A e B vale l'equazione

$$M_f(x)=\frac{2}{3}F(x)$$

dove x=0 in corrispondenza di A e x= L/3 in corrispondenza di B; il valore di M_f in corrispondenza di B sarà quindi

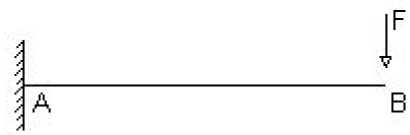
$$M_{f,B}=\frac{2}{3}F\frac{L}{3}=\frac{2FL}{9}=\frac{2\cdot 981\cdot 1000}{9}=218.000\frac{N}{mm^2}$$

Applicando la formula per il calcolo del momento flettente si ottiene il valore della tensione normale massima nel punto B

$$\sigma_B=\frac{M_{f,b}}{W_f}=\frac{218.000}{3668,26}=59,429\frac{N}{mm^2}$$

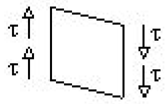
poichè tale valore (σ_{max}=59,428 N/mm^2) è inferiore alla ternsione ammissibile (σ_{amm}=156,6 N/mm^2) il tubolare resiste alla sollecitazione statica.

<u>Taglio:</u> nella trave sollecitata dal sistema di forze in figura



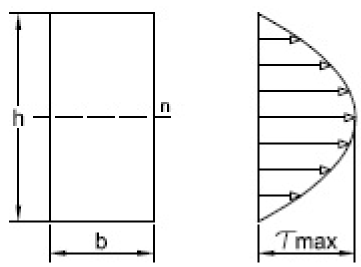
le sezioni sono soggette, come abbiamo visto in precedenza, ad una sollecitazione di flessione crescente mano a mano che ci avviciniamo al punto A; oltre a questa è presente una sollecitazione di taglio che tende a far slittare in senso verticale le fibre di ogni generica sezione della trave

la deformazione, a differenza di tutti i casi visti fino ad ora, ora è causata da tensioni tangenziali indicate convenzionalmente dalla lettera τ



Il valore di tali tensioni *per una sezione rettangolare* è massimo in corrispondenza dell'asse neutro e nullo in corrispondenza delle fibre più lontane da esso; il valore massimo della tensione tangenziale è calcolabile con la formula

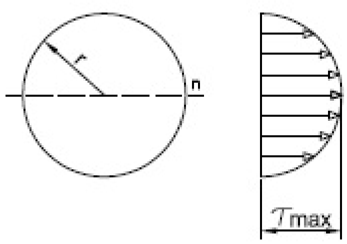
$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F}{b\cdot h} \qquad [\frac{N}{mm^2}]$$



Se invece *la sezione è circolare* il valore massimo è dato dalla formula

$$\tau_{max}=\frac{4}{3}\frac{F}{\pi r^2} \qquad [\frac{N}{mm^2}]$$

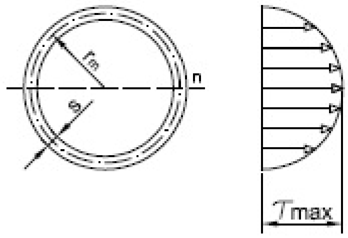
e si ha sempre in corrispondenza dell'asse neutro



Nel caso di una sezione a forma di *corona circolare* il valore massimo è calcolabile con la formula

$$\tau_{max}=\frac{F}{\pi r_m s} \qquad [\frac{N}{mm^2}]$$

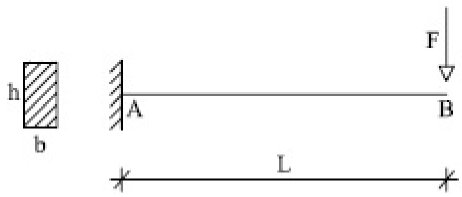
dove r_m è il valore medio del raggio e s lo spessore della sezione



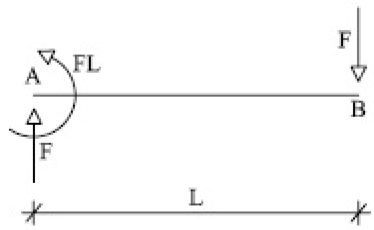
Se in una struttura sono presenti soltanto tensioni tangenziali siamo in condizioni di sicurezza se

$$\sigma_{amm} \geq \sqrt{3}\ \ \tau$$

Esempio 11: calcolare il valore massimo della tensione normale σ (dovuta al momento flettente) e della tensione tangenziale τ (dovuta al taglio) nella struttura seguente dove F=1000 N, L=1 m, b=20 mm, h=40 m



Dal calcolo delle reazioni vincolari ricaviamo



calcolo ora la tensione normale nella sezione più sollecitata (punto A)

$$M_f = F \cdot L = 1000 \cdot 1000 = 10000000\ Nmm$$

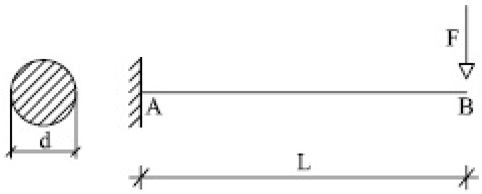
$$W_f = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \cdot 40^2}{6} = \frac{32000}{6} = 5333{,}33\ mm^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{1000000}{5333{,}33} = 187{,}51 \frac{N}{mm^2}$$

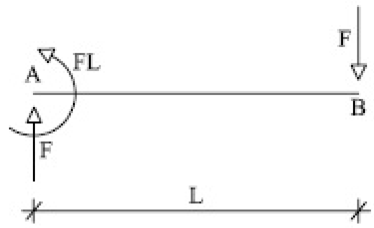
calcolo ora la tensione tangenziale dovuta al taglio (sollecitazione uguale in tutte le sezioni della struttura)

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F}{b\cdot h}=\frac{3}{2}\frac{1000}{20\cdot 40}=1{,}875\frac{N}{mm^2}$$

Esempio 12: calcolare il valore massimo della tensione normale σ (dovuta al momento flettente) e della tenzione tangenziale τ (dovuta al taglio) nella struttura seguente dove F=1000 N, L=1 m, d=32mm



Dal calcolo delle reazioni vincolari ricaviamo



calcolo ora la tensione normale nella sezione più sollecitata (punto A)

$$M_f=F\cdot L=1000\cdot 1000=10000000\,Nmm$$

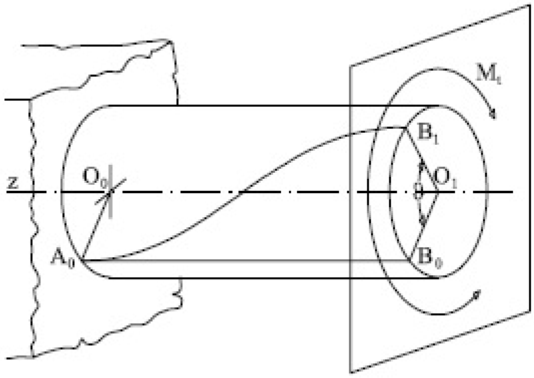
$$W_f=\frac{\pi\, d^3}{32}=\frac{\pi\cdot 32^3}{32}=3217\,mm^3$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_f}{W_f}=\frac{1000000}{3217}=310{,}84\frac{N}{mm^2}$$

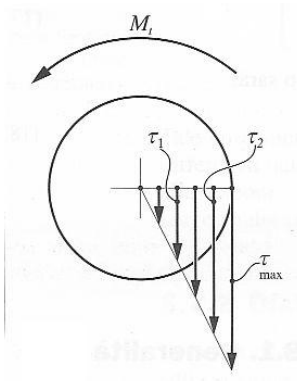
calcolo ora la tensione tangenziale dovuta al taglio (sollecitazione uguale in tutte le sezioni della struttura)

$$\tau_{max}=\frac{4}{3}\frac{F}{\pi\, r^2}=\frac{4}{3}\frac{1000}{\pi\cdot 16^2}=1{,}65\frac{N}{mm^2}$$

Torsione: una trave incastrata ad un estremo è sollecitata a torsione quando su di essa agisce un momento torcente M_t che tende a farla ruotare attorno al proprio asse facendo assumere alle fibre un andamento elicoidale ϑ



Sotto l'azione di questo momento torcente l'estremità libera ruota di un angolo θ rispetto all'estremità fissa. A causa della deformazione si creano delle tensioni interne che giacciono sulle sezioni stesse; per questo motivo tali tensioni sono tensioni tangenziali τ come quelle che abbiamo visto per il taglio.
Nel caso di una sezione circolare le τ di torsione sono nulle lungo l'asse della trave, massime in corrispondenza del bordo esterno.



La tensione massima si può ricavare con la formula

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_t}$$

dove W_t viene chiamato *modulo di resistenza a torsione*.

Per una sezione circolare piena tale valore si può calcolare con la formula

$$W_t=\frac{\pi d^3}{16}$$

mentre per una sezione circolare cava (tubo) la formula da utilizzare è

$$W_t=\frac{\pi}{16}\left(\frac{D^4-d^4}{D}\right)$$

Come nel caso del taglio siamo in condizioni di sicurezza se

$$\tau_{max} \leq \tau_{amm}$$

dove

$$\tau_{amm} = \sigma_{amm} \sqrt{3}$$

L'angolo θ di rotazione tra una generica sezione di riferimento e la sezione che stiamo considerando si calcola con la formula

$$\phi = \frac{M_t l}{G J_p}$$

dove

M_t = momento torcente agente sulla sezione [N/mm]
l = distanza tra la sezione considerata e la sezione di riferimento [mm]
G = modulo di elasticità tangenziale; si ricava dal modulo di Young con la formula G=0,385 E
J_p = momento di inerzia polare di superficie; per le sezioni circolari vale

$$J_p = W_t \frac{D}{2}$$

Esempio 13: un albero a sezione circolare piena avente un diametro di 20mm deve trasmettere una potenza P=4kW ad una velocità angolare ω = 250 giri/min; il materiale utilizzato per la sua realizzazione ha un carico unitario di snervamento superiore R_{eH} = 400 N/mm². Verificare l'albero utilizzando un coefficiente di sicurezza pari a 1,5.

Trasformo le unità di misura presenti nel testo in unità coerenti tra di loro

$$P = 4\text{kW} = 4000\text{W}$$

$$\omega = 250\, giri/min = 250 \frac{\pi}{30} \frac{rad}{s} = 26{,}18 \frac{rad}{s}$$

calcolo il momento torcente in base ai valori assegnati di potenza e numero di giri

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{4000\, W}{26{,}18\, rad/s} = 152{,}79\, Nm$$

calcolo la tensione tangenziale massima (il momento deve essere inserito in Nmm)

$$\tau_{max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 152790}{\pi \cdot 20^3} \frac{N}{mm^2} = 97{,}269\, N/mm2$$

Calcolo la tensione normale equivalente (σ_{eq})

$$\sigma_{eq}=\tau_{max}\sqrt{3}=97,269\cdot\sqrt{3}\,N/mm^2=168,474\,N/mm^2$$

calcolo la tensione normale ammissibile (σ_{ams})

$$\sigma_{ams}=\frac{R_{eH}}{1,5}=\frac{400\,N/mm^2}{1,5}=266\,N/mm^2$$

Per verificare la resistenza dell'albero occorre confrontare la tensione normale ammissibile con la tensione normale equivalente verificando se vale la relazione

$$\sigma_{ams}\geq\sigma_{eq}$$

nel nostro caso tale relazione è soddisfatta quindi l'albero è verificato.

Esempio 14: determinare di quanti gradi è la torsione tra le due estremità di un albero a sezione circolare (piena) avente un diametro di 8 mm se viene applicata una coppia pari a 30 Nm; la lunghezza dell'albero è 1m ed il materiale ha un valore del modulo di elasticità normale E= 210000 N/mm²

La formula da utilizzare è la seguente

$$\theta=\frac{M_t L}{G J_p}$$

converto le unità assegnate in modo che i loro valori siano coerenti

$$M_t=30\text{Nm}=30000\text{Nmm}$$

$$L=1\text{m}=1000\text{mm}$$

ricavo i valori di G e Jp

$$G=0,385\,E=0,385\cdot 210000\,N/mm^2=80850\,N/mm^2$$

$$W_t=\frac{\pi d^3}{16}=\frac{\pi 8^3}{16}mm^3=100,53\,mm^3$$

$$J_p=\frac{W_t\ d}{2}=\frac{100,53\cdot 8}{2}mm^4=402,12\,mm^4$$

$$\theta=\frac{30000\cdot 1000}{80850\cdot 402,12}rad=0,922\,rad=52,869^o$$

l'ultimo passaggio si giustifica ricordando che 1 rad = 57,295°